

# **Teoría de Markowitz con metodología EWMA para la toma de decisión sobre cómo invertir su dinero**

**Katherine Betancourt Bejarano<sup>1</sup>**

*Universidad Piloto de Colombia*

**Carlos Mario García Díaz<sup>2</sup>**

*Universidad Piloto de Colombia*

**Viviana Lozano Riaño<sup>3</sup>**

*Universidad Piloto de Colombia*

---

<sup>1</sup> Ingeniera Financiera de la Universidad Piloto de Colombia.

<sup>2</sup> Licenciado en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Ingeniero Financiero de la Universidad Piloto de Colombia y Magister en Economía de la Universidad Javeriana (Finalizando).

<sup>3</sup> Ingeniera Financiera de la Universidad Piloto de Colombia.

Actualmente, todos hacen parte del grupo de investigación de la Universidad Piloto de Colombia denominado “InnovaTIC”.

## **Resumen**

Actualmente los mercados financieros ofrecen diversas alternativas de inversión, que incluyen una gran variedad de activos, los cuales se diferencian entre sí, por el nivel de rentabilidad, liquidez, volatilidad y bursatilidad, asociada con los mismos, entre otras características propias del mercado; lo que conlleva a que los inversionistas utilicen diversas herramientas que les permitan escoger inversiones óptimas incurriendo en un nivel de riesgo determinado. Dado lo anterior, este documento plantea un modelo de optimización de portafolios eficientes basado en la teoría de Markowitz, utilizando metodología EWMA para el cálculo del riesgo del portafolio.

## **Abstract**

Financial markets currently offer various investment alternatives, including a variety of assets, which are differentiated by the level of profitability, liquidity, volatility and trading volume associated with them, among other characteristics of the market; it which implies that investors use various tools to choose optimal investments incurring a level of risk. Given the above, this paper presents a model of efficient portfolio optimization based on Markowitz's theory, using EWMA methodology for the calculation of portfolio risk.

*Palabras clave* - Portafolio óptimo, teoría de Markowitz, frontera eficiente, riesgo, EWMA (Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente), matriz Varianza-Covarianza.

*Key words* - Optimal portfolio, Markowitz theory, efficient frontier, risk, EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), variance-covariance matrix.

*Clasificación JEL* - G11 y C13.

## 1.- Introducción

En el mercado financiero, los inversionistas se enfrentan a diversos cambios, los cuales deben ser tenidos en cuenta en los análisis que se realizan para la toma de decisión sobre el cómo invertir el dinero. Estos cambios involucran cierto grado de incertidumbre y riesgo, ocasionado por los diferentes sucesos económico-financieros que se presentan en una economía, lo que dificulta dicha decisión; como por ejemplo, las volatilidades de los precios de los activos.

Por ende, los inversionistas utilizan herramientas y estrategias, tales como: modelos matemáticos, análisis técnico, pronósticos o predicciones, análisis del entorno económico, o quizás, muchos de ellos, tomen estas decisiones a partir de simples premoniciones. Lo que sí es claro, es que independientemente de la forma como se tome la decisión, siempre se estará buscando la mayor rentabilidad posible ante un nivel de riesgo específico.

A partir de lo expuesto anteriormente y buscando mejores opciones para los inversionistas, se realiza este trabajo basado en la teoría moderna de portafolios de Harry Markowitz (1952), con el objetivo de desarrollar un modelo de optimización de portafolios de inversión, que permita tomar decisiones sobre el cómo invertir, dado un conjunto de activos financieros disponibles desde el mercado accionario colombiano. Esta teoría tiene ventajas sobre las teorías clásicas de portafolio, ya que además de tener en cuenta el rendimiento de los activos, incorpora como elemento adicional el factor de riesgo, en un mismo modelo; creando así, un estilo de inversión, que usa de manera eficiente la información.

Como aporte a la metodología tradicional de esta teoría, el riesgo del portafolio será calculado teniendo en cuenta que en general, las series financieras presentan en su comportamiento periodos de relativa tranquilidad, seguidos por periodos de alta volatilidad y viceversa; de donde se deduce que la varianza de dichas series no es constante en el tiempo, por el contrario, en estas series es muy frecuente la heteroscedasticidad. Por tanto, el riesgo del portafolio será calculado a partir de la metodología del EWMA (promedio móvil ponderado exponencialmente), que permite asignar un mayor peso a los datos más recientes, lo que hace que el modelo, posiblemente, se ajuste más al comportamiento real de las series.

## 2.- Teoría de Portafolios

La teoría moderna de selección de portafolios se inicio con Harry Markowitz en el año de 1952, esta teoría se basa principalmente en la diversificación, concepto fundamental para la construcción de portafolios óptimos, es decir, para la estructuración de combinaciones de activos con las mejores relaciones de riesgo-rendimiento. Dicho

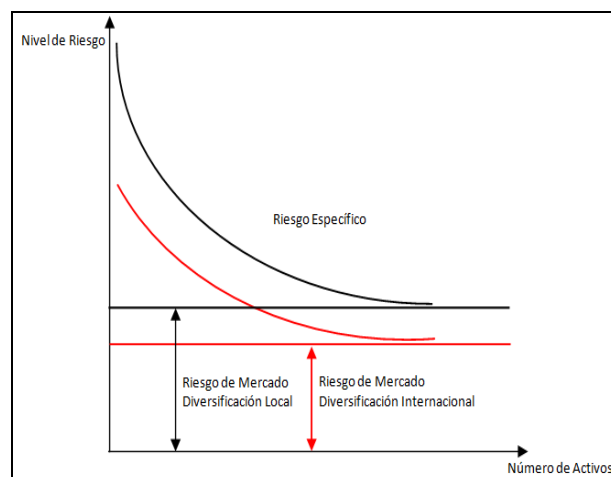
riesgo implícito en el portafolio, es evaluado por medio de la estimación de la varianza de los rendimientos esperados asociados con los activos que conforman el mismo.

Por diversificación se entiende invertir en más de un activo, con el fin de reducir el nivel de riesgo asociado con los factores específicos de una compañía, a los cuales se estaría expuesto en el caso de invertir en uno solo activo. El diversificar, ampliando el número de activos en los que se invierte, ayuda a reducir el riesgo, pero es claro, que nunca se llegará a eliminar este riesgo, por completo, ya que siempre existirán factores macroeconómicos que afectan a todas las industrias, hecho que implica una exposición permanente al riesgo, que no es diversificable. Pero también es importante notar, que un número exagerado de activos en una cartera, son difíciles de gestionar, por lo tanto, se recomienda un número prudente de éstos; este número es aquel, que al incluir un activo adicional, la reducción en el nivel de riesgo ya no es significativa.

Una estrategia para disminuir este riesgo, pero igualmente sin lograr eliminarlo, es la diversificación internacional, lo cual implica la inclusión al portafolio, de activos que pertenecen a mercados diferentes al local, afectados por otros factores macroeconómicos distintos a los del sistema económico-financiero inicial. (Ver gráfico 1).

*“El riesgo que permanece incluso tras la diversificación, se llama riesgo de mercado o riesgo sistemático, que es atribuible a fuentes de riesgo de todo el mercado, (mientras que) el riesgo que se puede eliminar mediante la diversificación se denomina riesgo específico de las compañías o riesgo no sistemático”<sup>4</sup>.*

**Gráfico 1.** Riesgo con diversificación local (curva negra) y diversificación internacional (curva roja).



Fuente: Revista Interfase, año 2, número 4, 2007. Pág. 121.

<sup>4</sup> BODIE, KANE y MARCUS (2004). Principios de inversiones. Quinta edición. Mc Graw Hill. Pág. 125.

La diversificación también se puede ver como la compensación que se da entre las pérdidas al invertir en algunos activos vs las ganancias de otros, y se soporta en la hipótesis de que el precio de los activos no cambia en iguales proporciones.

La teoría de Markowitz permite determinar lo que se denomina la frontera eficiente, la cual se define como el conjunto de portafolios conformados por todas las combinaciones de riesgo - rendimiento que se pueden obtener entre los diversos activos que hacen parte del mismo y que ofrecen el rendimiento esperado más alto para cualquier nivel de riesgo dado. En este estudio se construye una frontera eficiente de activos riesgosos -acciones negociables desde el mercado colombiano. (Ver gráfico 2).

También es importante notar, que no existen limitaciones para la creación de portafolios, estos se ajustan a los criterios de rentabilidad y riesgo de cada inversionista.

**Gráfico 2.** *Frontera eficiente de activos riesgosos*



Fuente: Basada en BODIE, KANE y MARCUS (2004). Pág. 140.

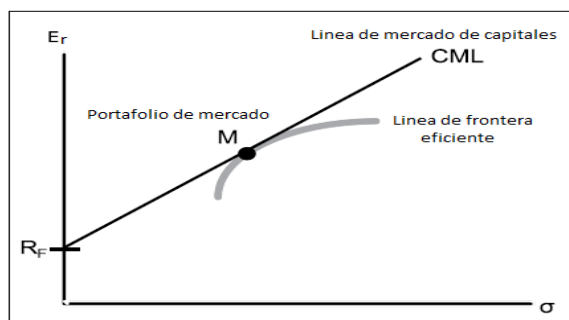
Después de la teoría de Markowitz, y basados en ésta, se realizaron diversos estudios, unos con el propósito de extender dicha teoría, y otros, para simplificar el cálculo de los parámetros de la propuesta inicial; dentro de estos estudios, se destacan: (1) el teorema de la separación propuesto por Tobin<sup>5</sup> (1958), que involucra el concepto de activo libre de riesgo, generando con esto, nuevas alternativas de inversión; (2) los modelos de estimación de

<sup>5</sup> TOBIN (1958) y SHARPE (1964), demuestran con este teorema que la cartera óptima de activos individuales con riesgo no depende de la actitud frente al riesgo, sino que es la misma para todos los inversores.

retornos o valoración de activos “CAPM”, utilizado por William Sharpe<sup>6</sup> (1963), para explicar las ventajas de la diversificación, e introducir los conceptos de riesgo sistemático, riesgo no sistemático y prima de riesgo, en la propuesta inicial; y (3) los modelos de arbitraje de tres factores de Fama y French (1992,1993), utilizados para explicar la varianza de los retornos promedio de las diferentes carteras; entre otros estudios.

Del teorema de la separación de Tobin, se desprende que el portafolio óptimo, en la línea de frontera eficiente, será igual para todos los inversionistas que componen el mercado. Este portafolio óptimo se encuentra ubicado en el punto de tangencia que se genera, entre la línea que une el punto de rentabilidad-riesgo asociado con el activo libre de riesgo y la frontera eficiente de Markowitz, a este portafolio se le denomina portafolio de mercado, y a esta línea, que se prolonga aún más después del punto de tangencia, se le conoce como Capital Market Line o Línea de Mercado de Capitales (CML). (Ver gráfico 3).

**Gráfico 3. Línea de mercado de capitales**



Fuente: Revistas EIA, número 2, 2008. Pág. 5.

La CML es la relación lineal entre el rendimiento esperado y el riesgo total para las diversas composiciones del portafolio de mercado y varias proporciones de préstamo o endeudamiento libres de riesgo.

En sí, el modelo teórico de Markowitz deduce que los inversionistas estructuran sus portafolios con activos riesgosos, y en el caso del teorema de la separación y del modelo CAPM, lo que se hizo, fue ampliar la propuesta inicial de Markowitz, incorporando un activo libre de riesgo, con rendimiento  $R_f$ , al conjunto inicial de activos riesgosos.

Este activo libre de riesgo, generalmente, es un valor indicado por el gobierno de cada país, con un vencimiento que coincide con el horizonte de tiempo de análisis del estudio, con una rentabilidad segura y sin ninguna inquietud acerca de su valor terminal, por consiguiente, su desviación estándar es cero, lo mismo que sus covarianzas con otros activos riesgosos. Como por ejemplo, en el caso de los EEUU, los bonos del tesoro a 30 años son activos que pueden considerarse cero riesgo.

<sup>6</sup> MARKOWITZ publicó en 1952, el documento “portfolio selection”, lo cual originó la teoría moderna de portafolios, que fue optimizada por Sharpe en 1964. En 1990, ambos recibieron el premio nobel en ciencias económicas por el desarrollo del modelo CAPM o modelo de valuación de activos de capital.

Es así como, a partir del modelo de valoración de activos de capital -CAPM, la nueva frontera eficiente es esta Línea de Mercado de Capitales -CML, en la cual los inversionistas encontrarán los mejores portafolios, y de este conjunto, escogerán su portafolio óptimo, de acuerdo a la rentabilidad esperada y al nivel de riesgo que se esté dispuesto a asumir. Todo esto es posible, ya que, al incorporar el activo libre de riesgo en la construcción de la nueva frontera eficiente, el inversionista podrá obtener un portafolio de menor riesgo y menor rentabilidad en comparación con el portafolio de mercado, si combina el activo libre de riesgo con activos riesgosos (parte inferior de la CML, antes del punto de tangencia). Así mismo, el endeudamiento libre de riesgo deja al inversionista superar la rentabilidad del portafolio de mercado, al invertir todo su dinero más el prestado en el portafolio de activos riesgosos (parte superior de la CML, después del punto de tangencia)<sup>7</sup>.

### **Construcción de portafolios óptimos**

Para llevar a cabo la construcción de los portafolios eficientes, se sugieren los siguientes pasos:

- Se recopila la información diaria de los precios históricos de los activos que se van a analizar. Como mínimo un horizonte de estudio de dos años.
- Se sugiere completar los datos de los días festivos con el último precio de cotización inmediatamente anterior al festivo, asumiendo éste como un día hábil.
- Se calcula la rentabilidad<sup>8</sup> de forma diaria ( $R_t$ ), por cada activo  $k$ , con base en los precios; donde  $t$  representa el día específico de cotización del activo,  $P_t$  representa el precio del activo en el día  $t$  y  $P_{t-1}$  representa el precio del activo del día hábil inmediatamente anterior al día  $t$ :

$$R_t = \ln \left[ \frac{P_t}{P_{t-1}} \right]$$

- Se realiza el cálculo de la rentabilidad promedio de cada activo  $k$ , donde  $n$  representa la cantidad de datos que conforman cada una de las series de rentabilidad de cada activo  $k$ :

$$\bar{R}_k = \sum_{t=1}^n \frac{R_t}{n}$$

<sup>7</sup> Basados en RAMÍREZ y FERNANDEZ. Estructuración de portafolios de acciones en el mercado de Hong Kong. En: Revistas Soluciones de Postgrado EIA. Número 2. Págs. 5-55. Medellín 2008.

<sup>8</sup> Se hace referencia solo al resultado de la valorización o desvalorización de la acción en el mercado; es decir, el cociente del precio de venta menos el precio de compra, sobre el precio de compra de la acción. Matemáticamente, este cociente es aproximadamente igual al logaritmo natural del precio de venta sobre el precio de compra de la acción.

Hasta este momento, se tendría una matriz de información de rendimientos promedio  $\bar{R}_{k \times m}$  donde  $m$  representa el número de activos riesgosos que se han elegido para hacer parte del conjunto de posibilidades de inversión dentro de la estructuración de los diferentes portafolios:

$$(\bar{R}_{1,1} \quad \bar{R}_{1,2} \quad \dots \quad \bar{R}_{1,m})$$

- Se construye una matriz de información  $W_{m \times q}$  de pesos iniciales, donde  $m$  sigue siendo el número de activos riesgosos y  $q$  representa el número de portafolios que se pretenden construir; y dado que los pesos con que se inicializa el modelo influyen en la obtención de un mínimo y en la rapidez con la que se converge hacia éste, entonces se aconseja que la inicialización de pesos se haga con valores positivos cercanos a cero y menores que uno, ya que los pesos que se buscan tienen esta característica:

$$W = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,q} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m,1} & w_{m,2} & \dots & w_{m,q} \end{pmatrix}$$

- Las matrices  $\bar{R}_{k \times m}$  y  $W_{m \times q}$  se multiplican para determinar el vector de elementos de  $E(R_p)$  (rendimiento esperado por cada portafolio). Como en este caso hay  $q$  portafolios, luego hay  $q$  rendimientos esperados:

$$(E(R_p)_{1,1} \quad E(R_p)_{1,2} \quad \dots \quad E(R_p)_{1,q})$$

- Se calcula la matriz de varianzas y covarianzas (VARCOVAR), por metodología EWMA (modelo de suavizamiento exponencial). Para hacer énfasis sobre el hecho de que la metodología de cálculo de varianzas y covarianzas es por EWMA, y no por el método tradicional, se ha decidido poner el superíndice  $E$  sobre cada uno de los elementos de la matriz VARCOVAR, la cual es una matriz simétrica  $m \times m$ ; por otro lado, es importante aclarar que la construcción de esta matriz se explica en apartados posteriores, con mayor detalle:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^{2E} & \sigma_{12}^E & \dots & \sigma_{1m}^E \\ \sigma_{21}^E & \sigma_2^{2E} & \dots & \sigma_{2m}^E \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^E & \sigma_{m2}^E & \dots & \sigma_m^{2E} \end{pmatrix}$$

- Se calcula el riesgo asociado a cada portafolio ( $\sigma_p$ ), por separado, con base en la matriz VARCOVAR, esto equivale a multiplicar las matrices  $\omega_p'_{1 \times m}$ ,  $\sigma_{m \times m}^E$  y  $\omega_p_{m \times 1}$  donde  $\omega_p$  es el vector columna conformado por el conjunto de pesos referidos al portafolio  $p$ , y  $\omega_p'$  es el vector transpuesto respectivo:



$$\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\approx \sigma_p = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Desarrollado este proceso base, se prosigue a la construcción de diferentes portafolios eficientes, a partir de la solución de un problema de optimización, con las siguientes restricciones comunes a todos: (1) No se permiten operaciones apalancadas, por lo tanto, la suma de los pesos debe ser igual a 1; y (2) Las ventas en corto no son permitidas, por lo tanto, los pesos deben ser mayores o iguales a cero; así:

$$\text{Minimizar } \sigma_p = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{sujeto a: (1) } \sum_{i=1}^m w_i = 1$$

$$(2) w_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Luego, adicionando determinadas restricciones al anterior problema de optimización, se logra la construcción de diversos portafolios tales como:

#### **Portafolios eficientes con expectativas de rendimiento**

Para este caso, igualmente, se busca minimizar el riesgo del portafolio  $(\sigma_p)$ , sujeto a la siguiente restricción adicional, además de las dos restricciones anteriormente expuestas:

$$E(R_p) = K$$

$K$  es la expectativa de rendimiento esperado, asociada con un tipo de inversionista específico.

#### **Portafolio con el mínimo retorno**

Para este caso, se busca minimizar el retorno esperado  $E(R_p)$ , sujeto a las dos restricciones inicialmente expuestas.

#### **Portafolio con el máximo de retorno**

Para este caso, se maximiza el retorno esperado  $E[R_p]$ , sujeto a las dos restricciones inicialmente expuestas.

### Portafolio tangente

Éste se construye a partir del *índice o razón de Sharpe* -  $IS$ , el cual calcula el exceso de rentabilidad sobre la tasa de interés libre de riesgo  $[E(R)_p - R_f]$ , logrado por el portafolio, por unidad de volatilidad o riesgo propio del portafolio  $[\sigma_p]$ ; este índice se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$IS_p = \frac{[E(R)_p] - R_f}{\sigma_p}$$

Donde  $[E(R)_p]$  es igual al rendimiento esperado del portafolio,  $R_f$  es el rendimiento promedio del activo libre de riesgo y  $\sigma_p$  es la volatilidad del portafolio.

Para aplicar este índice se manejan los rendimientos históricos, cuando el valor del  $IS$  es positivo y grande, indica altos niveles de rendimiento y baja variabilidad, mientras que si el valor del  $IS$  es negativo y grande, indica rendimientos inferiores a la tasa libre de riesgo y baja variabilidad. Este índice estipula que tan bueno es el desempeño del portafolio si se le compara con el respectivo índice del portafolio de referencia<sup>9</sup>.

El problema de optimización para conseguir el portafolio tangente, utilizando el *índice o razón de Sharpe*, consiste en maximizar  $IS$ , sujeto a las dos restricciones inicialmente expuestas.

De esta manera, se construyen todos los portafolios que se deseen, y se conforma la frontera eficiente. Es claro que, como se mencionó en los pasos previos, este proceso de optimización, requiere del cálculo de la matriz de varianzas y covarianzas asociada con los activos que hacen parte del portafolio, la cual se construye de la siguiente manera:

### Matriz Varianza Covarianza

Para el cálculo de la matriz Varianza-Covarianza, lo cual es pieza fundamental en el cálculo del riesgo de un portafolio, se utiliza la metodología EWMA (modelo de suavizamiento exponencial). Este modelo, cuando se aplica para medir la volatilidad de un activo, emplea un promedio ponderado de los rendimientos pasados de una serie de tiempo, con el fin de pronosticar o proyectar un comportamiento futuro, por lo general, de corto plazo.

<sup>9</sup> Basado en CARBONELL Y ECHAVARRIA. Estructuración de un portafolio óptimo de inversión en divisas representativas del mercado Forex. En: Revistas Soluciones de Postgrado EIA. Número 2. Págs. 79-92. Medellín 2008.

Como ya se sabe, este modelo asigna una mayor ponderación a las observaciones más recientes, es decir, que a medida que estos datos van convirtiéndose en datos más rezagados de la serie, su importancia va siendo menor, de esta forma, se esperan proyecciones y estimaciones más precisas, en momentos en que el mercado financiero presenta volatilidades.

### **Cálculo de la Varianza por EWMA**

La varianza se halla mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$$

Donde:

$\sigma_t^2$ : Varianza para el momento t

$\lambda$ : Constante de suavizamiento entre 0 y 1.

$r$ : Rentabilidad

Con lo anterior se verifica que la “varianza es igual a lambda veces la volatilidad del día anterior, más uno menos lambda veces el cuadrado de la rentabilidad del día anterior, es decir, que si en el día la volatilidad es alta, esto lleva a que haya un incremento en la volatilidad que se estima”<sup>10</sup> para el día siguiente.

En la anterior formula, se debe elegir una constante de suavizamiento ( $\lambda$ ), que debe ubicarse entre cero y uno, por lo general, en la mayoría de casos se emplea  $\lambda = 0,94$ <sup>11</sup>. También es claro que, entre más pequeño sea el valor del  $\lambda$ , se le está asignando mayor peso a los datos más recientes, en busca de una respuesta rápida a los cambios del activo.

Se pueden realizar diversos procesos con respecto a la selección de lambda para lograr un mejor suavizamiento; en este caso, se utilizó el estadístico de Suma de Cuadrados del Error (SCE) para llevar a cabo dicha selección, el cual se calcula estimando la varianza por la metodología EWMA, probando diferentes valores de lambda, y posteriormente, se elige la lambda que haya arrojado la menor SCE.

Para determinar el estadístico de SCE, se halla el valor del error en cada momento del tiempo y para cada activo, a partir de la siguiente fórmula:

$$\varepsilon_t = r_t^2 - \sigma_t^2$$

<sup>10</sup> BUENAVENTURA y CUEVAS. Una propuesta metodológica para la optimización de portafolios de inversión y su aplicación al caso colombiano. Universidad ICESI, 2005. Pág. 95.

<sup>11</sup> Risk Metrics establece un  $\lambda = 0,94$  para datos diarios.

Posteriormente, se suman todos estos errores elevados al cuadrado, lo que se conoce como SCE, por cada lambda que se prueba y activo.

Seleccionada la lambda de menor SCE, se conoce la varianza estimada por la metodología EWMA; para el caso de la covarianza, donde el activo en cuestión se asocia con cada uno de los demás activos que hacen parte del portafolio, se tomó la decisión de trabajar con el lambda de menor SCE, que resulta de comparar los lambdas de menor SCE de cada uno de los dos activos involucrados.

Este procedimiento, realizado sobre cada serie de rentabilidad para el cálculo de la varianza, y entre pares de series para el cálculo de la covarianza, conlleva a la matriz VARCOVAR.

### **Cálculo de la Covarianza por EWMA**

A partir del método EWMA, la covarianza  $\sigma_{ij}(t)$ , se expresa de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda \sigma_{ij}(t-1) + (1 - \lambda) r_{i(t-1)} r_{j(t-1)}$$

La cual involucra dos series, en este caso, la serie de rendimientos de dos activos, los cuales están designados como  $i$  y  $j$ <sup>12</sup>.

Es importante notar que tanto para la varianza, como para la covarianza, se requieren valores iniciales de  $\sigma_{ii}(t-1)$  y de  $\sigma_{ij}(t-1)$ , para ello, según revisión bibliográfica, se tomó como valor inicial cero.

### **3.- Propuesta de diseño de una frontera eficiente y desarrollo de la misma**

En el proceso de selección de activos para la estructuración de portafolios, los índices accionarios juegan un papel relevante, ya que estos miden la evolución de los precios de las acciones de mayor peso, información que es bastante significativa, dado que ofrecen una idea del desempeño del mercado. En el caso colombiano, existen tres índices accionarios: IGBC, COLCAP Y COL20. Entre las características más relevantes del IGBC, están: (1) refleja el comportamiento promedio de los precios de acciones en el mercado colombiano, (2) resulta de ponderar las acciones más líquidas y de mayor capitalización negociadas en Bolsa, y (3) se calcula a diario con base en una canasta de acciones que se recalcula de manera trimestral.

<sup>12</sup> RAAJI y RAUNIG (1998). "A comparison of value at risk approaches and their implications for regulators". Págs. 59-60.

También muchos analistas siguen el comportamiento de este índice para tomar decisiones de compra o venta de acciones. Actualmente (2011), en la Bolsa de Valores de Colombia existen 102 empresas inscritas, de las cuales las 32 acciones de mayor bursatilidad componen el IGBC. Los otros dos índices del mercado colombiano, el índice accionario de liquidez COL20, refleja la variación en los precios de las 20 acciones más liquidas, ponderadas por su nivel de liquidez, y el índice accionario de capitalización COLCAP, está compuesto por las mismas 20 acciones más liquidas, pero ponderadas por su nivel de capitalización bursátil ajustado.

A nivel internacional, uno de los índices más importantes y antiguos, es el *Dow Jones* (Dow Jones Industrial Average), éste data desde 1984 y lo conforman 30 empresas de gran tamaño de EE.UU, las cuales tienen una vasta participación en actividades industriales y comerciales; este índice refleja el comportamiento promedio en el precio de las acciones. A partir de noviembre 01 de 1999 el Dow Jones incluyo a dos empresas cotizadas en la Bolsa Nasdaq (Microsoft e Intel).

Con el índice *Dow Jones* se puede analizar la evolución que ha tenido el precio de las acciones en el mercado bursátil de los Estados Unidos.

Para la presente propuesta, basada en la aplicación de la teoría de Markowitz sobre la construcción de una frontera eficiente, calculando el riesgo del portafolio a partir de la metodología EWMA, se seleccionaron las 32 acciones con mayor promedio de volumen transado en el mercado colombiano, que se encuentran en los primeros puestos del ranking de capitalización bursátil y son las más liquidas, las cuales se analizan en un período de tiempo de 3 años, desde el 6 de Octubre del 2008 hasta el 29 de Septiembre de 2011. Estas acciones hacen parte de los índices anteriormente expuestos.

Lo primero, fue crear el portafolio nacional compuesto por 16 acciones colombianas y un portafolio nacional e internacional compuesto por 32 acciones, las 16 del portafolio nacional más 16 acciones internacionales que se pueden negociar en Colombia.

Posteriormente se procede a calcular el rendimiento diario por cada acción, durante todo el horizonte de estudio,

a partir de la fórmula del  $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ , descrita previamente, como se evidencia parte de ello, en el gráfico 4.

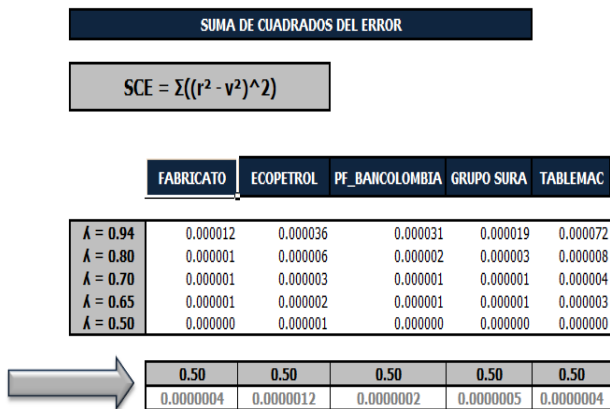
**Gráfico 4. Rendimiento diario de los activos**

RETORNO DIARIO									
FECHA	FABRICATO	ECOPETROL	PF_BANCOLOMBIA	GRUPO SURA	TABLEMAC	INVERARGOS	ISA	ISAGEN	CEHARGOS
06/10/2008									
07/10/2008	-0,0115	-0,0082	-0,0197	-0,0088	-0,0059	0,0031	-0,0245	-0,0076	0,0000
08/10/2008	-0,0473	-0,0355	-0,0601	-0,0295	-0,0198	-0,0264	-0,0083	-0,0391	0,0000
09/10/2008	0,0000	-0,0299	-0,0495	-0,0291	-0,0222	-0,0162	-0,0168	-0,0242	-0,0364
10/10/2008	-0,1063	-0,0938	-0,0948	-0,1016	-0,0831	-0,0817	-0,0839	-0,0589	-0,0910
14/10/2008	0,1063	0,0894	0,0996	0,0949	0,0811	0,0762	0,0896	0,0937	0,0953
15/10/2008	-0,0496	-0,0751	-0,0944	-0,0772	-0,0788	-0,0598	-0,0548	-0,0541	-0,0645
16/10/2008	-0,0301	-0,0312	-0,0590	-0,0524	-0,0500	-0,0464	-0,0045	-0,0339	-0,0465
17/10/2008	0,0173	0,0312	0,0272	0,0228	0,0253	0,0229	0,0279	0,0640	0,0157
20/10/2008	0,0254	0,0234	-0,0161	0,0296	-0,0023	0,0000	-0,0073	-0,0108	0,0000
21/10/2008	-0,0559	0,0023	0,0181	0,0000	-0,0324	-0,0120	-0,0073	0,0000	-0,0237
22/10/2008	-0,0269	-0,0545	-0,0458	-0,0602	0,0000	-0,0947	-0,0606	-0,0417	-0,0713
23/10/2008	-0,0755	-0,0098	-0,0266	-0,0723	-0,0859	0,0066	-0,0645	-0,0288	-0,0566
24/10/2008	-0,0451	-0,0713	-0,0473	-0,0726	-0,0997	-0,0132	0,0000	-0,0207	-0,0580

Fuente: Autores.

Obtenidas las series de rendimiento de las acciones seleccionadas, se estima por la metodología EWMA, la varianza de cada uno de los activos; iniciando con un  $\lambda=0.94$ , se prueban diferentes valores de lambda, y se calcula el estadístico de Suma de Cuadrados del Error (SCE) para cada una de las pruebas, y con cada acción, como se evidencia parte de ello, en el gráfico 5. Posteriormente se selecciona la lambda con menor SCE.

**Gráfico 5. Método sumas de cuadrados del error.**



Lambda seleccionado para cada acción.

Fuente: Autores.

Seleccionada la lambda de menor SCE, se conoce la varianza estimada por la metodología EWMA; y se calculan las covarianza, por la misma metodología, y con estos valores de varianza y covarianza se genera la matriz denominada VARCOVAR (gráfico 6).

Gráfico 6. Matriz VAR-COVAR.

MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS

GENERAR VARIANZAS

GENERAR MATRIZ DE COVARIANZA

	FABRICATO	ECOPETROL	PF_BANCOLOMBIA	GRUPO SURA	TABLEMAC	INVERARGOS	ISA	ISAGEN	CEMARGOS	CORFICOLOMBIANA
FABRICATO	0.000219	-0.000165	-0.000042	-0.000122	0.000195	-0.000006	-0.000007	0.000038	-0.000038	-0.000077
ECOPETROL	-0.000165	<b>0.000369</b>	0.000077	0.000137	0.000005	-0.000019	0.000168	0.000039	0.000286	0.000147
PF_BANCOLOMBIA	-0.000042	0.000077	<b>0.000100</b>	0.000082	0.000141	0.000045	0.000045	0.000049	0.000111	0.000085
GRUPO SURA	-0.000122	0.000137	0.000082	<b>0.000182</b>	0.000116	0.000075	0.000070	0.000041	0.000210	0.000091
TABLEMAC	0.000195	0.000005	0.000141	0.000116	<b>0.000515</b>	0.000121	0.000134	0.000171	0.000350	0.000057
INVERARGOS	-0.000006	-0.000019	0.000045	0.000075	0.000121	<b>0.000086</b>	0.000014	0.000005	0.000080	0.000012
ISA	-0.000007	0.000168	0.000045	0.000070	0.000134	0.000014	<b>0.000128</b>	0.000123	0.000245	0.000089
ISAGEN	0.000039	0.000139	0.000049	0.000041	0.000171	0.000005	0.000123	<b>0.000137</b>	0.000224	0.000060
CEMARGOS	-0.000038	0.000286	0.000111	0.000210	0.000350	0.000080	0.000245	0.000224	<b>0.000565</b>	0.000129
CORFICOLOMBIANA	-0.000077	0.000147	0.000085	0.000091	0.000157	0.000012	0.000089	0.000060	0.000129	<b>0.000078</b>
EXITO	-0.000030	-0.000032	-0.000002	0.000016	-0.000044	0.000027	-0.000031	-0.000049	-0.000055	-0.000011
AVAL	-0.000015	0.000185	0.000036	0.000042	0.000052	0.000039	0.000082	0.000073	0.000147	0.000019
NUTRESA	-0.000017	0.000232	0.000035	0.000113	0.000082	0.000002	0.000106	0.000100	0.000208	0.000117
ETB	0.000220	-0.000152	0.000036	0.000027	0.000464	0.000116	0.000054	0.000104	0.000172	-0.000015
BVC	-0.000128	0.000182	0.000032	0.000371	0.000363	0.000216	0.000208	0.000111	0.000028	0.000031
INTERBOLSA	0.000009	0.000001	-0.000004	-0.000005	0.000004	0.000001	0.000007	0.000006	0.000012	-0.000002

Fuente: Autores.

Donde en el encabezado tanto de las filas como de las columnas se ubican las acciones, en la diagonal quedan ubicadas las varianzas, y por encima y por debajo de esta diagonal se ubican las covarianzas.

En la presente propuesta, se calculan 12 portafolios, entre ellos el portafolio de mínimo riesgo, los portafolios de mínimo y de máximo rendimiento, el portafolio tangente, y distintos portafolios óptimos que se deducen variando el valor de  $R$  (rendimiento fijo esperado), como se explicó previamente.

Luego de realizar la optimización, en cada uno de los portafolios, se obtiene el riesgo por cada portafolio, su respectivo rendimiento esperado y el vector de pesos correspondiente. Este último, es el vector que sugiere la proporción de capital que se debe invertir en cada uno de los activos, con el fin de materializar el rendimiento esperado, bajo un nivel de riesgo dado.

Por último, se agrupa gráficamente el conjunto de combinaciones de riesgo-rendimiento obtenidas en cada uno de los portafolios, para constituir así, la frontera eficiente, obteniendo como resultado comportamientos similares a los de la gráfica 3.

Algunos de los resultados obtenidos, para el portafolio óptimo en la cartera nacional y para la cartera nacional e internacional son:

**Gráfico 7.** *Portafolio óptimo en la cartera nacional (usando EWMA)*

<i>Acciones obtenidas para la inversión</i>	<i>Porcentaje de inversión</i>
Corficolombiana	40%
Éxito	34%
Fabricato	23%
<i>Riesgo Diario: 0.29%</i>	
<i>Retorno Esperado Diario: 0.13%</i>	

El restante 3% distribuido en otras acciones.

Fuente: Autores.

**Gráfico 8.** *Portafolio óptimo en la cartera nacional-internacional (usando EWMA)*

<i>Acciones obtenidas para la inversión</i>	<i>Porcentaje de inversión</i>
Amazon	22%
Corficolombiana	21%
Apple	18%
Éxito	12%
Fabricato	8%
Grupo Sura	5%
Tablemac	5%
Nutresa	4%
<i>Riesgo Diario: 0.30%</i>	
<i>Retorno Esperado Diario: 0.134%</i>	

El restante 5% distribuido en otras acciones.

Fuente: Autores.

En estos gráficos, 7 y 8, se puede evidenciar la proporción de capital que se sugiere invertir en cada uno de los activos, materializando el rendimiento y riesgo asociados al portafolio en sí, esta sugerencia de estructurar el portafolio con estas proporciones es recomendable ejecutarla dentro de un período prudente alrededor del momento de obtención de los resultados. De lo contrario, se debe recalcular las proporciones de capital sugeridas, y para ello, este estudio ha desarrollado el software respectivo que facilita dichos cálculos, con un horizonte de tiempo móvil, de manera que siempre se trabaje con la misma cantidad de datos, desechando el dato más antiguo y reemplazándolo por un dato reciente.

Por otro lado, al comparar los resultados de riesgo y rentabilidad, entre las dos carteras, en este caso particular no es evidente el beneficio de la diversificación internacional, aunque para ello, es aconsejable comparar más simulaciones.



Adicional a los resultados obtenidos con la metodología EWMA, se realizaron nuevos cálculos, estructurando los dos portafolios por el método tradicional, es decir, el riesgo del portafolio fue calculado con desviación estándar típica; obteniendo los siguientes resultados:

**Gráfico 9.** Portafolio óptimo en la cartera nacional (Desviación estándar)

<i>Acciones obtenidas para la inversión</i>	<i>Porcentaje de inversión</i>
Corficolombiana	78%
Isagen	16%
Nutresa	6%
<i>Riesgo Diario: 1.43%</i>	
<i>Retorno Esperado Diario: 0.118%</i>	

Fuente: Autores.

**Gráfico 10.** Portafolio óptimo en la cartera nacional-internacional (Desviación estándar)

<i>Acciones obtenidas para la inversión</i>	<i>Porcentaje de inversión</i>
Apple	96%
Ecopetrol	4%
<i>Riesgo Diario: 2.33%</i>	
<i>Retorno Esperado Diario: 0.165%</i>	

Fuente: Autores.

En estos gráficos, se observan las proporciones de capital que se sugiere invertir en cada uno de los activos, asumiendo la metodología de desviación estándar para el cálculo del riesgo de cada uno de los portafolios.

Comparando ambos resultados (graficas 7 y 8 vs graficas 9 y 10, respectivamente), se evidencian fuertes diferencias en cuanto a la diversificación del portafolio nacional-internacional, ya que es bastante pobre en la metodología por desviación estándar, al sugerir invertir todo el capital en tan solo dos activos, lo cual eleva el nivel de riesgo, de acuerdo al concepto de diversificación, mientras que en la metodología por EWMA el conjunto de activos que se propone es más amplio. Por otro lado, en cuanto al nivel de riesgo y retorno esperado, se evidencia que constituir los portafolios de acuerdo al resultado obtenido por desviación estándar, conlleva al inversionista a asumir un mayor nivel de riesgo que no es compensado con un mayor nivel de rentabilidad.

## 4.- Conclusiones

El modelo expuesto en este artículo, permite ofrecer una metodología clara para diseñar diferentes alternativas de inversión dependiendo de la rentabilidad que se espera ganar y el riesgo que se está dispuesto a asumir. A partir de la conformación de portafolios óptimos que se ubican en la frontera eficiente a través del análisis matemático de la evolución de las rentabilidades de los diferentes activos.

Al analizar los resultados obtenidos por cada uno de los portafolios de inversión realizados con base en la teoría de Markowitz, se evidencia que el desempeño de los portafolios obtenidos conforman una buena guía de búsqueda para los inversionistas que no conocen mucho del mercado, combinando activos de diferentes especies y que tienen buenas referencias en el mercado, en cuanto a liquidez y capitalización, con lo cual se esperaría una mayor participación de nuevos inversionistas; además las propuestas son diversificadas.

El portafolio óptimo que se recomienda para un inversionista, derivado del uso de la metodología EWMA en el cálculo del riesgo del portafolio, frente a una cartera nacional es aquel compuesto 40% por acciones de Corficolombiana, 34% por acciones de Éxito y 23% en acciones de Fabricato, obteniendo una ganancia del 0.13% diario con un riesgo de 0.29%. En cuanto a la cartera nacional - internacional, el portafolio óptimo obtenido estaría compuesto por un 22% en Amazon, 21% en Corficolombiana, un 18% en Apple, 12% en Éxito, 8% en Fabricato, 5% en Grupo SURA, 5% en Tablemac y 4% en Nutresa, obteniendo una ganancia del 0.134% diario con un riesgo de 0.30%. Esta sugerencia de estructurar el portafolio con estas proporciones es recomendable ejecutarla dentro de un período prudente alrededor del momento en que se obtienen los resultados, de lo contrario, se debe recalcular las proporciones de capital sugeridas.

Analizando los resultados obtenidos, se evidencia que la hipótesis: *“Una cartera diversificada internacionalmente, comparadas con carteras puramente nacionales, tienden a ofrecer un rendimiento comparable entre sí, a un menor nivel de riesgo”*<sup>13</sup>, no se cumple en este caso, lo cual es explicable dado el comportamiento satisfactorio de los mercados emergentes sobre los mercados desarrollados en cuestión de volatilidades, en estos momentos de crisis; aunque es necesario comparar más simulaciones para verificar el cumplimiento de esta hipótesis.

Con la matriz de varianzas y covarianzas hallada con la metodología EWMA, se busca darle un mayor peso a las observaciones más recientes, con lo cual se pueden estructurar portafolios de manera más ajustada al comportamiento real de los activos, con los objetivos de rentabilidad y riesgo establecidos, es decir, con el EWMA es posible construir mejores y más precisas estimaciones cuando se trabaja con series que presentan periodos de relativa tranquilidad seguidos por periodos de alta volatilidad y viceversa, como el caso de las series financieras, donde es muy frecuente la heteroscedasticidad, ya que la varianza no es constante en las observaciones por los cambios que se generan.

<sup>13</sup> GITMAN (2007). Principios de Administración Financiera. Diversificación Internacional. Pág. 209.

## **Recomendaciones**

Se recomienda realizar pruebas de backtesting sobre los resultados que se obtengan del presente modelo, con el fin de construir estrategias de inversión que permitan actuar frente a diversas situaciones específicas; además, estas pruebas son indispensables para validar los resultados.

## Bibliografía

BACHILLER, Alfredo. Modelos de Markowitz y Sharpe. [En línea] Zaragoza: Universidad de Zaragoza (última actualización: enero de 2001) Disponible en: <http://www.5campus.org/bolsa>

BODIE Zvi, KANE Alex y MARCUS Alan (2004). Principios de inversiones. Quinta edición. *Mc Graw Hill*.

BUENAVENTURA VERA, Guillermo y CUEVAS ULLOA, Andrés Felipe. Una propuesta metodológica para la optimización de portafolios de inversión y su aplicación al caso colombiano. Universidad ICESI, 2005.

CARBONELL ALDANA, Beatriz, ECHAVARRIA ELEJALDE, Luis Felipe. Estructuración de un portafolio óptimo de inversión en divisas representativas del mercado Forex. En: *Revistas Soluciones de Postgrado EIA*. [En línea]. Número 2. Pg. 79-92, Medellín 2008. [Consultado 2 Oct. 2011]. En: <http://revistapostgrado.eia.edu.co/Revista%>>

COBO QUINTERO, Álvaro José. La importancia de la volatilidad en la selección óptima de portafolios. 2003.

DE RAAJI, Gabriela, y BURKHARD, Raunig. "A comparison of value at risk approaches and their implications for regulators". 1998.

GITMAN, Lawrence J. Principios de Administración Financiera. Diversificación Internacional. 11ª Edición 2007. *Pearson*. Pág. 209.

GRAJALES BEDOYA, Duván Darío. Una mirada crítica más allá de Markowitz. En: *Administer universidad EAFIT*. [En línea]. Págs. 1-9. 2009. [Consultado 20 sept. 2011]. Disponible en <http://www.eafit.edu.co/revistas/administer>

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. En: *The Journal of Finance*, Vol. 7, N°1, Marzo de 1952. Págs. 77-91. [Consultado el 16 de Octubre de 2011]. <http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p00b/p0060.pdf>

MARTINEZ, Claudia; RESTREPO, Jorge y VELASQUEZ, Juan. Selección de portafolios usando simulación y optimización bajo incertidumbre. *Revista Dyna*, N°141, Marzo 2004. Págs. 35-57. En: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=49614106>

RAMÍREZ CÓRDOBA, Gloria, FERNANDEZ ECHEVERRI, Claudia. Estructuración de portafolios de acciones en el mercado de Hong Kong. En: *Revistas Soluciones de Postgrado EIA*. [En línea]. N° 2. Págs. 39-55, Medellín 2008. [Consultado 5 Oct. 2011]. En: <http://revistapostgrado.eia.edu.co/>.

URIBE GIL, Jorge Mario. Caracterización del mercado accionario colombiano. Bogotá. 2007.

VARÓN PALOMINO, J. C., Portafolio de inversión: La norma y el negocio. Capítulo 1: Conceptos básicos sobre portafolios de inversión, Bogotá, *Editorial Temis, Segunda edición 2008*. Pág. 41.